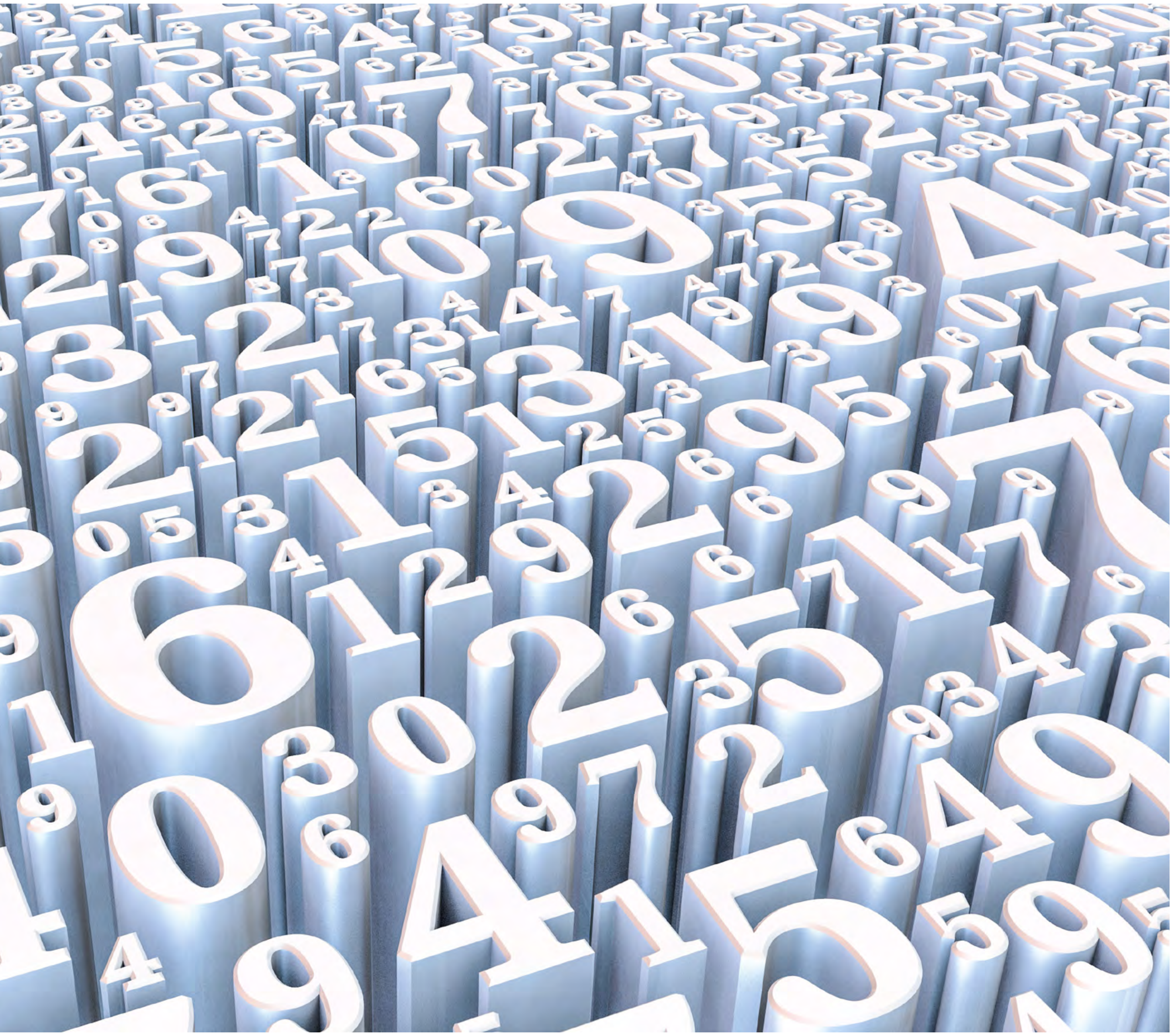
Nützliche Zahlenkniffeleien

Lehrreiches aus scheinbar Sinnlosem

Was ist der Unterschied zwischen einem Mathematiker und einem Computer? Diese etwas scherzhaft klingende Frage lässt sich durchaus ernst gemeint so beantworten: „Der Mathematiker kann etwas beweisen, muss aber nicht rechnen. Der Computer muss rechnen, kann aber nichts beweisen." Dabei schwindet im Zeichen der Künstlichen Intelligenz die Sicherheit, dass das immer so bleiben muss. Wird es Computern in Zukunft gelingen, mathematische Vermutungen unwiderlegbar nach den formalen Regeln der logisch-mathematischen Beweisführung zu bestätigen? Noch sind wir nicht so weit. Das leicht zu verstehende „Collatzproblem" ist ein Beispiel dafür, dass eine einfache Frage eine offensichtlich schwierig zu gebende Antwort hat. So wartet das Collatzproblem bis heute auf eine akzeptierte Lösung durch einen mathematischen Beweis - entweder vom Menschen oder vom Computer.



Wer kann noch kopfrechnen?

Im Zeitalter von Taschenrechner und Computer haben viele Menschen die Fähigkeit zum gedanklichen Lösen mathematischer Probleme weitgehend verloren oder erst gar nicht erworben. Auch die als Wirtschaftsingenieurin mitten im Berufsleben stehende Tochter des Autors stellte dies bei sich selbst fest und beklagte sich darüber im Gespräch mit ihrem Vater. Da kam es gerade gelegen, dass dieser zufällig kurz zuvor auf das Collatzproblem gestoßen war, das sein Interesse an Folgen ganzzahliger Zahlen und deren Bildungsgesetzen erweckte. Bis zu einer gewissen Komplexität lassen sich die Zahlen einer Collatzfolge nämlich im Kopf bestimmen, was die Kopfrechenfähigkeit zumindest in Bezug auf Multiplikation und Divison fordert und trainiert.

Das Collatzproblem wurde von Lothar Collatz (1910–1990) im Jahr 1937 formuliert. Er war lange Jahre als Professor der Mathematik an der Universität Hamburg tätig, von deren Hompage auch das Foto (Bild 1) stammt.

Collatz beschreibt die Bildung einer Zahlenfolge gemäß zwei ganz einfacher Regeln, nach denen sich von einer beliebigen Ganzzahl ausgehend die Folgenelemente bestimmen lassen. Das Merkwürdige ist nun, dass unabhängig von der frei gewählten Ausgangszahl die sich daraus entwickelnde Zahlenfolge immer bei der Zahl 1 endet oder besser gesagt in einer Schleife 1 → 2 → 4 → 1 → 2 → 4 → ... Weil Collatz bei allen untersuchten Startzahlen dieses Verhalten feststellen konnte, war seine Vermutung, dass dieses Phänomen des abschließenden Zyklus 1, 2, 4 nicht nur bei den durch Nachrechnen bestätigten Startzahlen, sondern generell für jede Startzahl gilt.

Man hat bis heute Startzahlen bis in den Trillionenbereich (10^{18}) untersucht und dabei keine Ausnahme von der Collatzschen Vermutung gefunden. Aber die empirische Bestätigung einer Vermutung ist eben kein Beweis! Der konnte auch im Laufe der vielen Jahre von keinem Mathematiker nach den Regeln der logischen Beweisführung erbracht werden. Deshalb gilt das Problem als „notorisch schwierig", obwohl seine Formulierung einfach ist.

Der Mathematiker Paul Erdös sagte zur Lösung des Collatzproblems: „Hoffnungslos. Absolut hoffnungslos." und „Die Mathematik ist für solche Probleme noch nicht bereit." Der Mathematiker Richard Guy warnte 1983 mit den Worten: „Versuche nicht, dieses Problem zu lösen!" Um bei geistiger Gesundheit zu bleiben, wollen wir das erst gar nicht versuchen, doch einen Eindruck von der Problematik gewinnen. Also werden wir jetzt konkret.

Der Weg zur Collatzfolge

Bild 1: Der Mathematiker Lothar Collatz im Mai 1990

Die zu einer Collatzfolge führende Rechenvorschrift lautet: Ein Folgewert wird aus seinem Vorgänger n bestimmt, indem man diesen durch 2 teilt, wenn er gerade ist (n/2), oder mit 3 multipliziert und 1 addiert, falls er ungerade ist (3n+1). Deshalb wird das Collatzproblem auch als (3n+1)-Vermutung bezeichnet.

Ein Beispiel: Betrachten wir einen Startwert von cstart = 5. Weil er ungerade ist, müssen wir ihn mit 3 multiplizieren und 1 addieren, was zum Folgewert 16 führt. 16 wird (weil gerade) durch 2 geteilt, was zum nächsten geradzahligen Folgewert 8 führt. So geht es jetzt über 4 und 2 bis zur 1 weiter. Gemäß Vorschrift muss die ungerade 1 mit 3 multipliziert werden und 1 addiert werden, wodurch man wieder bei 4 landet. Teilt man 4 durch 2 und 2 durch 2, ist man wieder bei 1 angekommen usw. Wir zyklieren nun in einer Endlosschleife 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4 ...

Anhand einiger Beispiele mit niedrigen Startwerten können wir uns von diesem verblüffenden Resultat noch mit Kopfrechnen überzeugen (Bild 2) und unsere Fähigkeiten darin trainieren.

Die sich aus den Startzahlen 1 bis 25 ergebenden Collatzfolgen konnten ohne Hilfsmittel über Kopfrechnung ermittelt werden. Das geht bis zu einer gewissen Anzahl von Folgenwerten, aber einfacher ist es, das repetitive Abarbeiten der Bildungsvorschrift (gerade/2) und (ungerade*3+1) einem kleinen Pythonprogramm zu überlassen, dem wir auch einige Auswerteaufgaben übertragen können, beispielsweise wie viele Schritte bis zum Erreichen des finalen Zyklus 4, 2, 1 erforderlich waren und wie viele Elemente die Collatzfolge hat. Wenn es darum geht, möglichst viele Collatzfolgen in einem bestimmten Zeitraum zu berechnen, lassen sich auch einige Erkenntnisse aus der näheren Betrachtung der 25 dar-

```
Startzahl  1: 1, 4, 2, 1, …
Startzahl  2: 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl  3: 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl  4: 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl  5: 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl  6: 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl  7: 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl  8: 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl  9: 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 10: 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 11: 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 12: 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 13: 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 14: 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 15: 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 16: 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 17: 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 18: 18, 9, 28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 19: 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 20: 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 21: 21, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 22: 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 23: 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 24: 24, 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
Startzahl 25: 25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, …
usw., usw., …
```

Bild 2: Diese Collatzzahlenfolgen lassen sich durchaus noch im Kopf berechnen.

gestellten Folgen programmtechnisch verwerten, was sich aber nur bei Berechnungen über riesige Startzahlenmengen lohnt.

- Jede ungerade Zahl wird durch Multiplikation mit 3 wiederum zu einer ungeraden Zahl und durch Addition von 1 zu einer geraden. Es folgt also immer auf eine ungerade Folgenzahl eine gerade. Daher genügt es, nur gerade Startzahlen zu betrachten. Sollte vor einer geraden Startzahl eine ungerade Zahl liegen, muss diese den Wert (gerade Startzahl-1)/3 haben. Starten wir also beispielsweise bei 10, ergibt sich die Folge 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Nur einen Folgewert mehr und ansonsten die gleiche Folge verursacht ein Startwert von (10-1)/3 = 3. Damit ergibt sich 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Das Gleiche gilt aber auch für einen doppelt so großen und deshalb ebenfalls geraden Vorgängerwert von 2*10: 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. Es ist schon vertrackt.
- Stößt man bei der sukzessiven Bildung der Glieder der Collatzzahlenfolge auf ein Element, das eine Zweierpotenz ($2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$ usw.) darstellt, oder beginnt die Folge mit einer Zweierpotenz als gerader Startzahl, geht es von hier aus kontinuierlich mit der Halbierung jedes Elements zum Folgenelement weiter, bis die 1 erreicht ist. Der geraden Startzahl $2^4 = 16$ folgen demnach in gerader Linie 4 weitere Folgenelemente 8, 4, 2, 1, bei $2^{10} = 1024$ sind es 10 weitere Folgenelemente bis zur 1 usw.

Bild 3 zeigt ein Python-Programm, das die Collatzzahlen bis zu einem maximalen Startwert berechnet. In der Kommandozeile (Konsole) sind die Folgenwerte für die Startzahlen 5, 6 und 7 zu sehen.

Um Platz in der Kommandozeile zu sparen, kann man die Zeilen 4 und 12 durch Voransetzen eines #-Zeichens auskommentieren (sie werden dann bei der Programmausführung nicht beachtet) und sich die Ergebnisse cstart (Startzahl), cmax (größte Zahl in der Collatzfolge) und n (Länge der Collatzfolge) für einen größeren Bereich von Startzahlen ohne die einzelnen Folgenwerte ausgeben lassen. Bild 4 zeigt das für die Startzahlen 1 bis 35. Die Variabilität der Ergebnisse ist verblüffend. Während der Startwert 26 eine 11 Elemente lange Folge mit einem Maximalwert von 40 erzeugt, sind dies 112 Folgenwerte mit einem Maximalwert von 9232 beim nächsten Startwert 27. Man kann diese Ergebnisse auch grafisch darstellen (z. B. Folgenlänge n und Maximalwert cmax als Funktion des Startwerts cstart), wie es Bild 5 für cstart im Bereich von 1 bis 35 zeigt.

Collatz_1.py

```python
1  for c in range (1, 9):
2      cmax = cstart = c
3      i = 1
4      print(i, "  ", c)
5  
6      while c != 1:
7          if c % 2 == 0:
8              c = int(c/2)
9          else:
10             c = 3*c + 1
11         i += 1
12         print(i, "  ",  c)
13         if c > cmax:
14             cmax = c
15     print("cstart =", cstart, "| cmax =", cmax, "| n =", i)
```

Kommandozeile

```
4    4
5    2
6    1
cstart = 5 | cmax = 16 | n = 6
1    6
2    3
3    10
4    5
5    16
6    8
7    4
8    2
9    1
cstart = 6 | cmax = 16 | n = 9
1    7
2    22
3    11
4    34
5    17
6    52
7    26
8    13
9    40
10    20
11    10
12    5
13    16
14    8
15    4
16    2
17    1
cstart = 7 | cmax = 52 | n = 17
1    8
2    4
3    2
4    1
cstart = 8 | cmax = 8 | n = 4
>>> 
```

Bild 3: Mit wenigen Python-Programmzeilen kann man die Collatzzahlenfolgen bis zu einem maximalen vorgegebenen Startwert bestimmen.

Collatz_1.py

```python
1  for c in range (1, 36):
2      cmax = cstart = c
3      i = 1
4      #print(i, "  ", c)
5  
6      while c != 1:
7          if c % 2 == 0:
8              c = int(c/2)
9          else:
10             c = 3*c + 1
11         i += 1
12         #print(i, "  ",  c)
13         if c > cmax:
14             cmax = c
15     print("cstart =", cstart, "| cmax =", cmax, "| n =", i)
```

Kommandozeile

```
>>> %Run Collatz_1.py

  cstart = 1 | cmax = 1 | n = 1
  cstart = 2 | cmax = 2 | n = 2
  cstart = 3 | cmax = 16 | n = 8
  cstart = 4 | cmax = 4 | n = 3
  cstart = 5 | cmax = 16 | n = 6
  cstart = 6 | cmax = 16 | n = 9
  cstart = 7 | cmax = 52 | n = 17
  cstart = 8 | cmax = 8 | n = 4
  cstart = 9 | cmax = 52 | n = 20
  cstart = 10 | cmax = 16 | n = 7
  cstart = 11 | cmax = 52 | n = 15
  cstart = 12 | cmax = 16 | n = 10
  cstart = 13 | cmax = 40 | n = 10
  cstart = 14 | cmax = 52 | n = 18
  cstart = 15 | cmax = 160 | n = 18
  cstart = 16 | cmax = 16 | n = 5
  cstart = 17 | cmax = 52 | n = 13
  cstart = 18 | cmax = 52 | n = 21
  cstart = 19 | cmax = 88 | n = 21
  cstart = 20 | cmax = 20 | n = 8
  cstart = 21 | cmax = 64 | n = 8
  cstart = 22 | cmax = 52 | n = 16
  cstart = 23 | cmax = 160 | n = 16
  cstart = 24 | cmax = 24 | n = 11
  cstart = 25 | cmax = 88 | n = 24
  cstart = 26 | cmax = 40 | n = 11
  cstart = 27 | cmax = 9232 | n = 112
  cstart = 28 | cmax = 52 | n = 19
  cstart = 29 | cmax = 88 | n = 19
  cstart = 30 | cmax = 160 | n = 19
  cstart = 31 | cmax = 9232 | n = 107
  cstart = 32 | cmax = 32 | n = 6
  cstart = 33 | cmax = 100 | n = 27
  cstart = 34 | cmax = 52 | n = 14
  cstart = 35 | cmax = 160 | n = 14

>>>
```

Bild 4: Wenn man nicht an den Werten der Collatzzahlenfolge interessiert ist, sondern nur an Startwert, Maximalwert der Folge und Anzahl der Folgenelemente, muss man die Zeilen 4 und 12 auskommentieren.

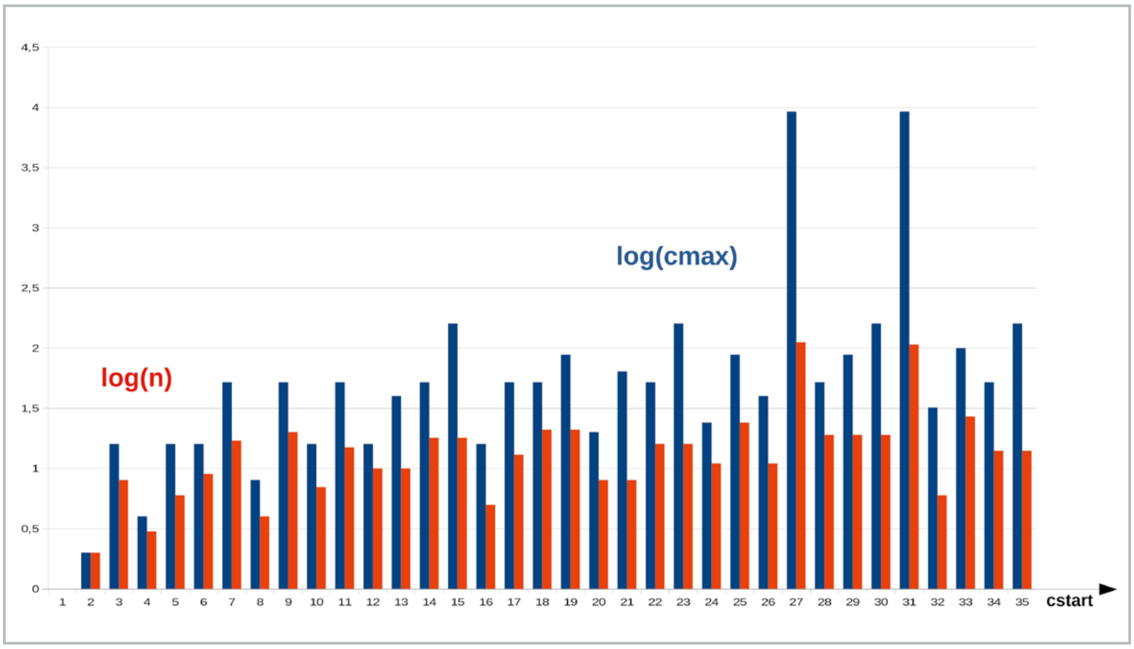


Bild 5: Das Bild zeigt den logarithmierten Maximalwert und die Anzahl der Glieder der von den Startwerten 1 bis 35 ausgehenden Collatzfolgen.

Um die besonders große Wertespanne von cmax = 1 bei cstart = 1 und cmax = 9232 bei cstart = 27 darstellen zu können, wurden die Ordinatenwerte logarithmisch gestaucht.

Aber auch diese Grafik lässt kein System der Werte erkennen. Lediglich bei den Collatzfolgen mit einer Zweierpotenz als Startwert oder einem ungeraden Startwert, der nach der Behandlung gemäß 3n+1 den Wert einer Zweierpotenz annimmt, ist es möglich, exakte Voraussagen über Länge und Werteverlauf zu machen.

Um eventuell doch noch Erkenntnisse aus dem Bereich größerer Startzahlen gewinnen zu können, wurden die maximalen Folgenwerte cmax und die Folgenlängen n für Startwerte im Intervall 1 bis 999 berechnet und in Bild 6 logarithmiert dargestellt.

Es ergibt sich für cstart = 871 die längste Folge mit n = 179 Folgegliedern (logarithmiert 2,253) und einem Maximalwert cmax = 190996 (logarithmiert 5,281). cstart = 703 und cstart = 937 führen zu je einer Folge, deren größtes Element cmax = 250504 (logarithmiert 5,399) ist, die sich aber in der Länge mit n = 171 Elementen (logarithmiert 2,233) und n = 174 Elementen (logarithmiert 2,241) geringfügig unterscheiden.

Die genannten Maximalwerte sind die drei blauen Nadeln im Diagramm, die über die Ordinatenlinie 5 herausragen. Aber was soll man daraus folgern?

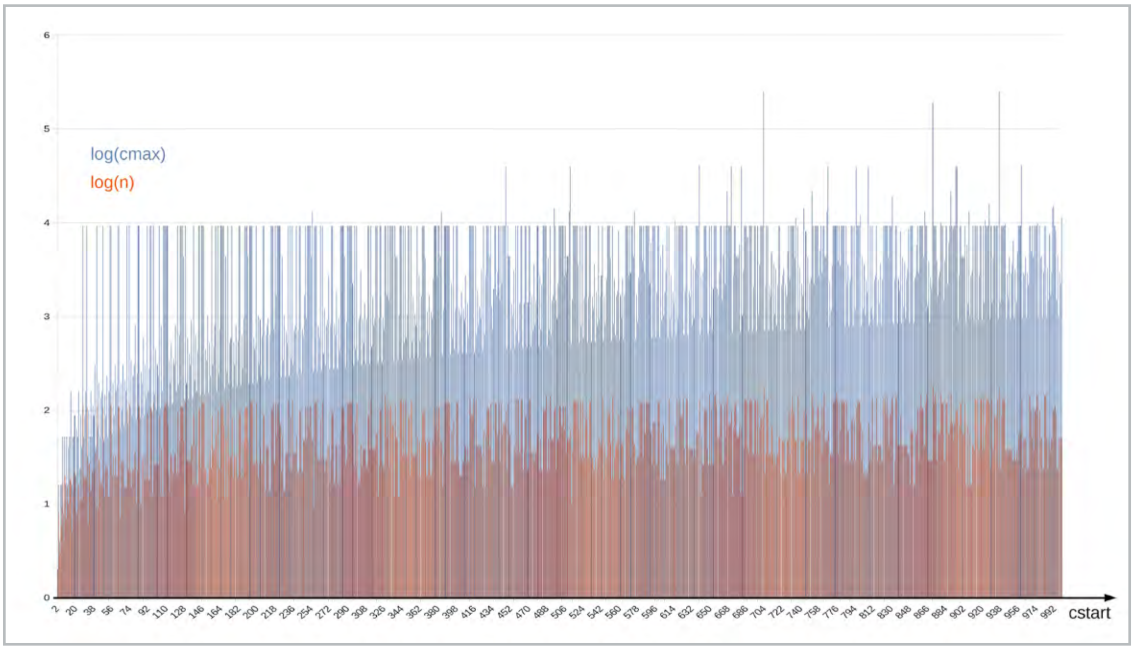


Bild 6: Die Darstellung gleicht Bild 5, jetzt aber für 1000 Startwerte. Nur drei Maximalwerte überschreiten einen Maximalwert von log(100000) = 5.

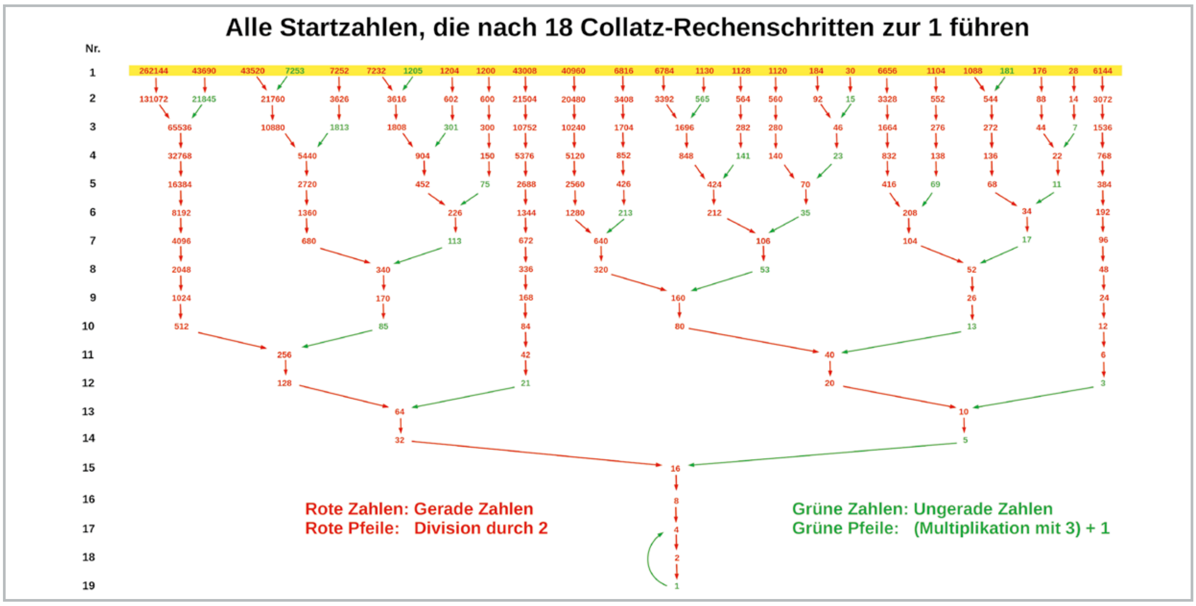


Bild 7: Der Collatzbaum (Collatz tree) wird von der Wurzel aus quasi rückwärts entwickelt. Der Folgenwert an jeder Verzweigungsstelle kann entweder aus einem durch 2 geteilten Vorgänger (n/2) oder einem mit 3n+1 behandelten herrühren. Im Beispiel ist man nach 18 Rechenschritten beim jeweiligen Startwert der Folge angelangt.

Eine gewisse Veranschaulichung gibt der Graph in Bild 7 (Collatzbaum), der die 19-elementigen Collatzzahlenfolgen darstellt, die ausgehend von den Startzahlen in der oberen, gelb hinterlegten Zeile mit 18 Rechenschritten zur Wurzel 1 führen. Er entsteht, indem man sich an der Wurzel startend überlegt, aus welchen Vorgängern in der Collatzfolge die gerade betrachtete Collatzzahl entstanden sein kann, und endet in der gelb hinterlegten Zeile. Geradzahlige Vorgänger sind stets doppelt so groß (gegen Richtung der roten Pfeile), ungeradzahlige durch Subtraktion von 1 und anschließender Division durch 3 entstanden (gegen Richtung der grünen Pfeile). Das ist die (3n+1)-Vorschrift in Gegenrichtung!

Es fällt auf, dass in allen Pfaden von der Startzahl zur Wurzel die Division durch 2 (rote Pfeile) deutlich häufiger vorkommt als die Multiplikation mit 3 und anschließender Addition von 1 (grüne Pfeile), was im Resultat die Konvergenz zur 1 verursacht.

Das ist natürlich nicht der gesuchte Beweis, aber macht plausibel, warum sich die Folgenelemente ausgehend von den Startzahlen durch Anwendung der Collatzrechenschritte im Mittel in Richtung 1 bewegen.

Wer sich davon überzeugen möchte, dass von den Startwerten in der oberen, gelb hinterlegten Zeile des Graphen die Folge über alle Folgenwerte auf dem Weg zur Wurzel des Graphen führt, kann das mit dem Miniscript in Bild 8 nachvollziehen. Hier kann man erkennen, dass vom Startwert 262144 = 2^{18} oben links der Weg zur Wurzel ohne Umwege durch 18-malige Halbierung zur 1 führt. Aber auch vom Startwert 28 entstehen 19 Folgenwerte, was verdeutlicht, dass ein kleiner Startwert nicht schneller zum Ziel führen muss als ein vieltausendfach größerer.

Bild 9 verdeutlicht das anhand der logarithmierten Collatzzahlen, exemplarisch ausgehend von den Startwerten 262144 = 2^{18} (blau), 1130 (rot) und 28 (grün). Weil 2^{18} nach jeder Division durch 2 bis zum Erreichen der Wurzel 1 stets auf eine weitere Zweierpotenz führt, fallen die Folgenwerte monoton. In Bild 7 kommt das darin zum Ausdruck, dass in diesem Pfad kein grüner Pfeil auftritt, der ja mit dem Faktor 3n und der anschließenden Addition von 1 verbunden ist, also das darauf folgende Collatzfolgenglied größer macht als das vorausgehende. Im Pfad des Startwerts 1130 finden sich 3 grüne Pfeile, was den dreimaligen Anstieg der Folgenwerte verursacht. Vom Startwert 28 ausgehend durchläuft man 5 grüne Pfeile, wodurch die Folgenwerte in ihrem Verlauf fünfmal wieder ansteigen.

Im Übrigen ist es interessant, dass sich das Konvergenzverhalten der Folge drastisch ändert, wenn man in dem Script in Bild 8 die Zeile 7 von c = 3*c + 1 zu c = 3*c - 1 ändert. Dann weicht die Bildungsvorschrift natürlich von der einer echten Collatz-

Collatz_2.py

```
1 while True:
2     c = int(input("Startzahl für Collatzfolge eingeben: "))
3     while c > 1:
4         if c % 2 == 0:
5             c = int(c/2)
6         else:
7             c = 3*c + 1
8         print(c)
```

Kommandozeile

```
Python 3.7.3 (/usr/bin/python3)
>>> %Run Collatz_2.py
 Startzahl für Collatzfolge eingeben: 28
 14
 7
 22
 11
 34
 17
 52
 26
 13
 40
 20
 10
 5
 16
 8
 4
 2
 1
 Startzahl für Collatzfolge eingeben:
```

Bild 8: Mit dem Programm lassen sich die Collatzfolgenglieder zu einem bestimmten Startwert ermitteln. Damit kann man den Collatzbaum in Bild 7 überprüfen.

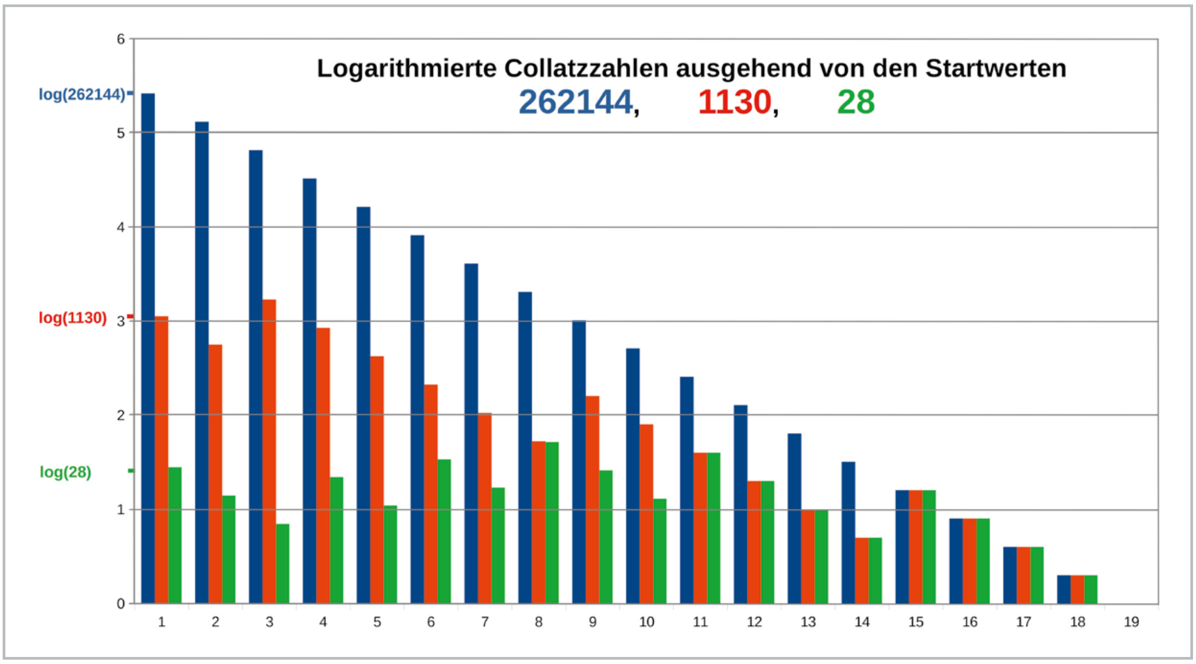


Bild 9: Wo im Verlauf einer Collatzzahlenfolge nach einem ungeraden Folgenelement die Multiplikation mit 3 mit der anschließenden Addition von 1 vorgenommen wird, steigt der Zahlenwert des dadurch gebildeten Folgegliedes.

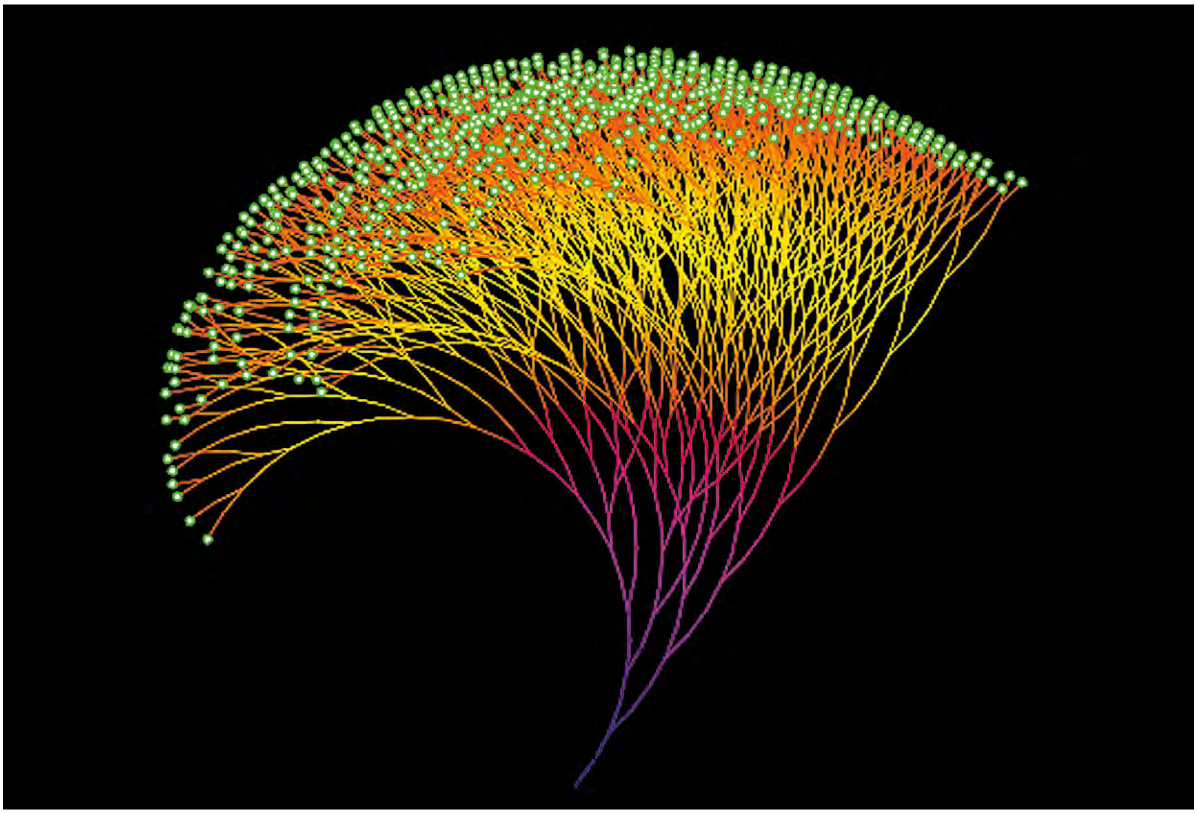


Bild 10: Wenn man an den Verzweigungspunkten eines Collatzbaumes die Wachstumsrichtung des Astes in Richtung gerader Vorgänger leicht nach links und in Richtung ungerader Vorgänger leicht nach rechts ändert und dabei noch etwas mit den Farben spielt, entsteht ein kleines Kunstwerk mit ästhetischem Reiz.

folge ab! Beispielsweise erreicht die modifizierte Folge ausgehend von dem Startwert 1130 nie den Wert 1, sondern endet nach erheblich mehr Folgenwerten in dem Endloszyklus 14, 7, 20, 10, 5. Beim Startwert 28 ist man nach dem ersten Halbierungsschritt bereits in diesem Zyklus. Bei anderen Startwerten kann es ganz anders aussehen.

Wenn man den Graphen des Collatzbaums etwas fantasievoller gestaltet, entsteht ein veritables kleines Kunstwerk. Bild 10 zeigt, wie ein animierter Collatzbaume beeindrucken kann. Ein Blick auf die Homepage des Programmierers lohnt sich!

Noch vieles gäbe es zum Collatzproblem zu sagen. Wer sich für Erstaunliches und Nachdenkenswertes auf dem Gebiet der Zahlentheorie interessiert, findet auf der Internetseite „The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences“ interessantes Material.

Ebenso spannend ist für den mathematisch und naturwissenschaftlich Interessierten die Internetseite „Wolfram MathWorld“. ELV